www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

MATHEMATIQUES I — Option économique

Jeudi 11 mai 1989 de 14 h à 18 h

EXERCICE I

Le but de l'exercice est d'étudier un algorithme d'approximation de ln x $(x > 1)$.

A) Inégalités préliminaires.
On définit deux fonctions T et S sur $[1, +\infty[$ par:

$$T(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad ; \quad S(x) = \frac{x^2-1}{2x}.$$

1°/ Démontrer que, pour $x \geq 1$:

$$T(x) \leq 2T(\sqrt{x}) \quad ; \quad 2S(\sqrt{x}) \leq S(x).$$

2°/ Etudier pour $x \geq 1$ les variations des fonctions f et g définies par:

$$f(x) = \ln(x) - T(x) \quad ; \quad g(x) = S(x) - \ln(x).$$

En déduire que, pour $x > 1$: $T(x) < \ln(x) < S(x)$.

B) Etude d'un algorithme d'approximation de ln x.
Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement supérieur à 1.
1°/ On note (u_n) la suite définie par $u_0 = x$ et la relation de récurrence:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

a) Prouver que, pour tout entier naturel n:

$$0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1).$$

En déduire un encadrement de $u_n - 1$ en fonction de x et n, puis la limite de (u_n).
b) Exprimer u_n en fonction de x et n.

2°/ On définit les deux suites (T_n) et (S_n) par:

$$T_n = 2^n T(u_n) \quad ; \quad S_n = 2^n S(u_n).$$

Déduire de A les variations des suites (T_n) et (S_n) et, pour tout entier naturel n, la double inégalité: $T_n < \ln(x) < S_n$.

3°/ Prouver la convergence des suites (T_n) et (S_n) et, en étudiant le rapport S_n/T_n, donner leur limite.

4°/ Pour tout entier naturel n, on pose $C_n = S_n/T_n$. Montrer que:

$$(1)\ C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}} \quad ; \quad (2)\ S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} \quad ; \quad (3)\ T_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{C_{n+1}}.$$

5°/ Etant donnés un réel $x > 1$ et un entier naturel p, écrire un algorithme (en français ou en PASCAL) utilisant les relations (1), (2), (3), et donnant:
- la plus petite valeur de l'entier n telle que:

$$S_n - T_n < 10^{-p}.$$

- la valeur approchée par excès de ln(x) ainsi obtenue.
Quels résultats numériques obtient-on pour x=2. x=3. x=5 avec p = 6?
(On donnera les résultats avec toutes les décimales fournies par la calculatrice)

C) Vitesse de convergence.
1°/ Dans cette question, f et g désignent les deux fonctions introduites en A.2°.
a) Prouver successivement que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$(i)\ 0 \leq g'(x) \leq \frac{(x-1)^2}{2} \quad ; \quad (ii)\ 0 \leq g(x) \leq \frac{(x-1)^3}{6}.$$

b) En raisonnant de même, déterminer un réel $k > 0$ tel que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$0 \leq f(x) \leq k(x-1)^3.$$

2°/ Dans cette question, on désigne par x un réel strictement supérieur à 1, et (u_n), (S_n) et (T_n) sont les suites précédemment introduites à la partie B.
a) Etablir que, pour tout entier naturel n:

$$S_n - \ln x = 2^n g(u_n) \quad ; \quad \ln x - T_n = 2^n f(u_n).$$

b) En déduire deux réels α et β tels que, pour tout entier naturel n:

$$0 \leq S_n - \ln x \leq \alpha \frac{(x-1)^3}{4^n} \quad ; \quad 0 \leq \ln x - T_n \leq \beta \frac{(x-1)^3}{4^n}.$$

Prouver enfin que:

$$0 \leq S_n - T_n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^3}{4^n}.$$

c) Pour quelle valeur minimale de n a-t-on

$$\frac{1}{2} \frac{(x-1)^3}{4^n} < 10^{-6}$$

pour x = 2 ? pour x = 3 ? et pour x = 5 ? Comparer ces valeurs à celles obtenues au B-5°/.

TSVP

EXERCICE II

Question Préliminaire :

Calculer les deux intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{1-\frac{x}{2}}\,dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$.

Dans ce qui suit, on désigne par N un entier supérieur ou égal à 3 et on considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On y effectue une suite de tirages, "au hasard" et "avec remise" (chaque boule tirée étant donc remise dans l'urne avant le tirage suivant) et on s'intéresse aux numéros des boules ainsi tirées.

A) Nombre de tirages nécessaires à l'obtention de n numéros distincts.

Pour tout entier naturel n tel que $2 \leq n \leq N$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au nombre minimum de tirages nécessaires à l'obtention, pour la 1ère fois, de n numéros distincts.

1°/ On pose $X_2 = 1 + Z_2$. Reconnaître la loi de la variable Z_2. Déterminer son espérance et sa variance.

2°/ On pose, pour $3 \leq n \leq N$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$ et on admet que les variables aléatoires Z_n et X_{n-1} sont indépendantes.
Interpréter la variable aléatoire Z_n, reconnaître sa loi et déterminer son espérance et sa variance.

3°/ Calculer, pour $2 \leq n \leq N$, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$.

4°/ On suppose, dans cette question, que N est pair et l'on pose $N = 2p$ $(p \geq 2)$.
Déterminer, à l'aide de la question préliminaire $\lim_{p\to\infty} \frac{E(X_p)}{p}$ et $\lim_{p\to\infty} \frac{V(X_p)}{p}$.

B) Nombre des numéros non obtenus à l'issue du n° tirage.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par Y_n la variable aléatoire égale au nombre des numéros non encore sortis à l'issue du n° tirage.

1°/ Que dire de la variable aléatoire Y_1 ?

2°/ On suppose $n \geq 2$.
a) Calculer $P([Y_n = k])$ pour $k \geq N$.
b) Démontrer la formule suivante, pour $0 \leq k \leq N-1$:
(1) $N.P([Y_n = k]) = (N-k).P([Y_{n-1} = k]) + (k+1).P([Y_{n-1} = k+1])$.
Vérifier que cette formule est encore valable pour $k = N-1$.

3°/ On pose pour $n \geq 1$:
$u_n = E(Y_n)$ et $v_n = E(Y_n^2 - Y_n)$.
Déduire de la relation (1) que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques et en déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_n.

4°/ On suppose dans cette question que N est pair et l'on pose $N = 2p$ $(p \geq 2)$.
Déterminer $\lim_{p\to\infty} \frac{E(Y_p)}{p}$ et $\lim_{p\to\infty} \frac{V(Y_p)}{p}$.

.....

Le lieu convient à évoquer ici

Marie Jean Antoine Nicolas CARITAT
marquis de CONDORCET
1743-1794

qui est l'initiateur de l'application des combinaisons et du calcul des probabilités aux sciences politiques, et l'un des savants engagés dans la Révolution.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail